GIOVANNI FERRERO

LA STRUTTURA TEORICA DELL'ARITMETICA EGIZIA

Estratto da:
«Quaderni», 1

MARZORATI EDITORE - MILANO

GIOVANNI FERRERO

LA STRUTTURA TEORICA DELL'ARITMETICA EGIZIA

Nel quadro di ricerche sulla formazione del *mathema* pitagorico in rapporto alla *dialettica* platonica si imponeva uno studio delle tecniche di calcolo egizio, quale aspetto del retroterra culturale da cui, stando alle tarde testimonianze di Porfirio e di Giamblico, il pitagorismo avrebbe preso spunti e problemi. Negare validità a tali testimonianze in rapporto al fatto storico di viaggi, avrebbe implicato ridurre la conoscenza storica alla critica dossografica in base all'autorità, senza esaminare di che cosa i pitagorici sarebbero debitori eventualmente, a partire dalle tecniche matematiche della casta sacerdotale egizia. Perciò l'interesse all'aritmetica egizia è stato regolato da quanto è possibile sapere dalle fonti sui pitagorici, per una migliore determinazione della loro problematica. Cosí il presente studio non si impone mediante la considerazione storiografica, quale unico criterio scientifico, ma si propone all'attenzione paziente del lettore e al giudizio competente dello studioso, per quanto concerne quell'aspetto teorico implicito nelle tecniche di calcolo, non sufficientemente messo in luce dagli studi piú recenti.

* * *

Il carattere elementare dell'aritmetica egiziana, quale la conosciamo da pochi testi redatti nel periodo del Regno Medio o degli Hyksos [1] non deve essere frainteso, come se da un lato non vi fosse alla sua base una intuizione formale e dall'altro non inerisse al pensiero umano, anche a quello matematico, una storicità essenziale. I limiti sono soprattutto dovuti al sistema dei segni che

[1] In questo studio ci riferiamo all'edizione moderna a cura di T. E. Peet, (London 1923) del *Papiro matematico Rhind*, pubblicato per la prima volta da Eisenlohr nel 1877.

indicano le unità, le decine, le centinaia, ecc., del numero, che veniva denotato ripetendo i segni corrispondenti. Le operazioni dell'addizione e della sottrazione non presentano perciò alcun problema, se non quello di conteggiare i segni. Ciò che è proprio di questa aritmetica è l'uso sistematico di una particolare frazione dell'unità ($1/n$), denotata con il geroglifico « r », che gli studiosi interpretano come « parte »: il segno numerico sormontato dal geroglifico significa parte n.sima di n e nella nostra esposizione seguiremo la convenzione

$$\bar{n} = 1/n.$$

Che si tratti proprio solo di una « frazione » e non anche del « reciproco » abbiamo i nostri dubbi, dato il ricorso ad uno schema grafico che è alla base di tutto il calcolo. Nei papiri si trova infatti uno schema di questo tipo:

$$\begin{array}{cc} 1 & n \\ \bar{n} & 1 \end{array}$$

che può essere letto: ad 1 corrisponde n, ad $\bar{n}$ corrisponde 1. Sulla particolarità di schemi siffatti, benché i testi non presentino alcun commento, ritorneremo in seguito, convinti che in essi sia racchiusa tutta l'informazione, purché la si sappia decodificare.

La tecnica o il principio del *raddoppiamento* consecutivo e la tecnica del costante *dimezzamento* dà luogo ad una serie geometrica di ragione 2, cioè all'uso di

$$2^{\pm x} \quad (x = 0,1,2,\ldots\ldots N)$$

la cui importanza è generamente riconosciuta, anche se è antistorico il modo in cui l'abbiamo indicata.

Nell'aritmetica egiziana abbiamo dunque il segno numerico n, il segno della parte n.sima $\bar{n}$, e una sequenza particolare della serie geometrica, che conferisce a questa aritmetica un carattere diadico. Per la nostra esposizione faremo ricorso ad un simbolo che non ha un corrispondente visibile nei papiri, cioè al complemento di $\bar{n}$ o di $a.\bar{n}$, indicato con C, per rendere ragione di una tecnica particolare relativa ai procedimenti di prova.

Siamo ora in grado di seguire alcuni problemi dell'aritmetica egizia. Alla base di questa v'è il presupposto implicito che ogni intero della serie dei numeri naturali o è un termine della serie geometrica di ragione 2 o è la somma di appropriati suoi termini, come il problema 79 del *Papiro matematico Rhind*

(PMR) lascia intravedere. La serie naturale degli interi è suddivisa in due sequenze come è illustrato dalla seguente tabella [2]:

Termini semplici	Termini da addizionarsi				Termini composti
1					
2					
	1	2			3
4					
	1		4		5
		2	4		6
	1	2	4		7
8					
	1			8	9
		2		8	10
	1	2		8	11
			4	8	12
	1		4	8	13
		2	4	8	14
	1	2	4	8	15
16					
..					..

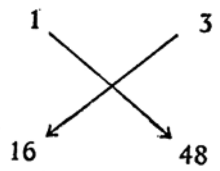
Risulta allora chiaro come può venire indicata ed effettuata l'operazione della moltiplicazione. Si duplica un fattore quante volte è necessario fino a che l'altro fattore o coinciderà con un termine della serie geometrica o con un termine composto. Sia da eseguire la moltiplicazione di 3 x 17; essa viene indicata ed eseguita secondo il seguente schema di calcolo:

/ 1	3	a	1	corrisponde	3
2	6	a	2	»	6
4	12	a	4	»	12
8	24	a	8	»	24
/ 16	48	a	16	»	48

Poiché $17 = 1 + 16$, il risutato della moltiplicazione viene ottenuto sommando 3, che corrisponde ad 1 che viene segnato da /, a 48, che corrisponde a 16.

(2) Siamo persuasi che le discussioni sulla « generazione dei numeri » dall'uno e dalla diade indefinita, riferita da ARISTOTELE in *Metafisica*, A, 6, 987 b 33-35; M, 7, 1082 a 15; 8, 1084 a 3; N, 3, 1091 a 11-12, siano da riferirsi a tabelle simili.

Dal punto di vista del *calcolo* ci troviamo indubbiamente di fronte ad un procedimento « essenzialmente additivo » (3), mentre dal punto di vista della *teoria* lo schema grafico contiene indicata la possibilità di una generalizzazione che concerne la proporzione. Se ciò può sembrare antistorico, si tenga presente che, affinché possa sorgere in un contesto culturale una *teoria*, è necessario che si abbia un dominio della lingua, quale si può avere solo con l'introduzione della scrittura alfabetica e vi sia il problema di trasmissione della cultura non più in modo orale, ma con lo scritto. La comunicazione orale è strutturalmente diversa da quella di uno scritto sia per quel che riguarda la denotazione che la connotazione. Alla nascita della *teoria greca* non è estranea una riflessione sulla lingua come pre-condizione per la comunicazione scritta, costume che è iniziato nel VI secolo a.C. nelle colonie joniche dell'Asia minore. In una civiltà per la quale la cultura si trasmette oralmente ed è proprietà esclusiva di un gruppo sociale non possiamo attenderci dai suoi documenti, scritti in una tale « lingua-oggetto », qualcosa che sia paragonabile ad un commento sui procedimenti e sui metodi. L'indizio per il quale si può affermare con un minimo di garanzia critica che la possibilità contenuta nello schema grafico di calcolo sia stata anche riconosciuta ci sembra indicato dal simbolo formato da due frecce incrociate (4) che si ritrova in vari documenti. Se inseriamo tale simbolo nello schema grafico si ottiene il seguente quadrilatero con le frecce lungo le sue diagonali:



Una figura siffatta indica immediatamente senza possibilità d'equivoco la proprietà della proporzione geometrica, che *verbalmente* si enuncia: il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi e in *simboli*, a.d. = b.c. Il contenuto informativo di uno schema figurato, quale quello da noi indicato con le due frecce, è superiore, quanto all'economia dei segni, ad ogni espressione verbale o scritta, che spezza in una catena di proposizioni l'insieme dell'informazione data simultaneamente nella percezione della figura. Se la nostra lettura dello schema grafico di calcolo, che presentiamo piú come una domanda agli specialisti che come una risposta, con l'aritmetica egizia dovremo essere in presenza di una tecnica elaborata consapevolmente nel dominio dei « numeri razionali » e non solo in quello elementare dei numeri interi. Si trova

(3) O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano, 1974, p. 96.

(4) Il simbolo di due frecce incrociate o parallele è in relazione con la dea egizia NET o NEITH che i greci hanno identificato con la loro ATHENA.

una conferma di ciò in quello che generalmente si presenta come il computo delle frazioni dell'unità. Poiché con il sistema di notazione egizia dei numeri non è possibile indicare le frazione m/n, si pone l'esigenza di decomporre tali frazioni in una somma di due o piú frazioni dell'unità e innanzi tutto la decomposizione di 2/n. Il PMR contiene una tavola di tali decomposizioni per n dispari che va da 3 a 101. Poiché il problema cosí presentato è di per sé indeterminato gli studiosi per lo piú hanno ritenuto che esso fosse stato risolto per *tentativi* e non attraverso precise regole. I tentativi dello scriba hanno dato per risultato i termini piú semplici tra quelli possibili, come è stato dimostrato nel 1967 dal confronto con i valori ottenuti con un *computer* programmato a tale scopo (5).

Esamineremo tre tipi di decomposizione, quella in due, in tre e in quattro frazioni. Per il primo tipo la tavola dà per n = 3,5,7 i seguenti valori:

$$2 : 3 = \overline{2} \quad \overline{6}$$
$$2 : 5 = \overline{3} \quad \overline{15}$$
$$2 : 7 = \overline{4} \quad \overline{28}$$

Si osservi la successione delle colonne, la prima, come è ovvio, è quella dei divisori dispari, la seconda e la terza, indipendentemente dal segno di frazione, sono rispettivamente la serie degli interi da 2 e una serie di numeri che i Pitagorici riconoscerebbero per quella dei *numeri triangolari*. La formula che generalizza questo procedimento, presentata dagli studiosi, è la seguente:

$$2/n = 1/(n+1)/2 + 1/n(n+1)/2.$$

Il calcolatore egiziano non segue costantemente questa regola, perché vuole evitare nella seconda colonna termini dispari; infatti per n = 9 non si ha

$$\overline{5} \qquad \overline{45}$$

ma, essendo 9 multipo di 3

$$\overline{6} \qquad \overline{18}$$

È ovvio che per n numero dispari quando $(n+1)/2$ non è pari, deve il calcolatore egiziano scegliere una decomposizione a tre o a quattro frazioni dell'unità.

Di fronte ad una tavola di valori numerici, senza commento, si pone dapprima il problema di identificare, se c'è, una loro legge di formazione, la piú semplice possibile e in seguito come si è giunti a tale regola. Poiché il riconosci-

(5) RICHARD J. GILLINGS, *Mathematics in the Time of the Pharaons*, The MIT Press, 1972, pp. 49-70.

mento di una eventuale legge di formazione richiede che si siano calcolati almeno i pirmi valori, non è inverosimile congetturare che il calcolatore egiziano abbia seguito proprio questa strada. Si tratta perciò di mostrare come siano stati calcolati i valori della divisione di 2 per 3, per 5, per 7, applicando semplicemente lo schema grafico.

Per la prima divisione:

$$2 : 3$$

Nella prima linea orizzontale si scrive che ad 1 corrispone 3, cioè

$$1 \qquad 3$$

si divida per 2

$$\overline{2} \qquad 1\ \overline{2}$$

Perciò lo schema ci dice che $3 \times \overline{2}$ equivale a $(1\ \overline{2})$, da cui dividendo per 3

$$\overline{2} = \overline{3}\ \overline{6}$$

Poiché il complemento C a 2 di $(1\ \overline{2})$ è $\overline{2}$ (infatti $1 + \overline{2} + \overline{2} = 2$), si divida $\overline{2}$ per 3, scrivendo $\overline{2}$ nella colonna di destra e il risultato $\overline{6}$ nella colonna di sinistra; tutto il procedimento di calcolo risulta dunque nel seguente schema grafico:

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ \overline{2} & \boxed{\begin{array}{cc} 1 & \overline{2} \\ & \overline{2} \end{array}} \\ \overline{6} & \end{array} \quad = 2$$

Per le proprietà formali dello schema grafico letto secondo il simbolo delle frecce incrociate si ha

$$3 \times (\overline{2}\ \overline{6}) = 2$$

da cui dividendo per 3 si ottiene il risultato cercato:

$$\overline{2} \qquad \overline{6}$$

Lo schema grafico non si presta soltanto ad essere letto secondo il simbolo delle frecce incrociate lungo le diagonali, ma anche secondo il simbolo delle frecce parallele ai lati del quadrilatero, denotando non più la moltiplicazione ma la divisione. In questo caso

$$\begin{array}{cccc} 1 & \uparrow & \uparrow & 3 \\ \overline{2} & & & \boxed{\begin{array}{cc} 1 & \overline{2} \\ & \\ & \overline{2} \end{array}} \\ \overline{6} & & & \end{array}$$

che può leggersi appunto: 2 diviso 3 è uguale a $(\overline{2}\ \overline{6})$ diviso 1.

Gli schemi grafici della divisione di 2 per 5 e per 7 sono rispettivamente i seguenti, segnando nella colonna di sinistra con / l'insieme delle frazioni unitarie che sono il risultato della divisione:

$$\begin{array}{cclll} & 5 & 5 & & \\ / & \overline{3} & 1 & \overline{2} & \overline{6} \\ / & \overline{15} & & \overline{5} & \overline{10}\ \ \overline{30} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cclll} & 1 & 7 & & \\ / & \overline{4} & 1 & \overline{2} & \overline{4} \\ / & \overline{28} & & \overline{7} & \overline{14}\ \ \overline{28} \end{array}$$

La decomposizione di 2/n in somma di tre o quattro frazioni unitarie risulta essere solo più complessa, sicché a volte è necessario ricorrere a delle tabelle di prova o a procedimenti di prova, che sono indicati nei papiri con l'introduzione di numeri ausiliari scritti in inchiostro rosso. Vedremo quale può essere la tecnica di calcolo di tali procedimenti di prova e l'eventuale loro significato. Prima di cercare di formulare in termini generali tutto il calcolo della decomposizione di 2/n esaminiamo alcuni esempi. Sia da calcolare 2/13:

Come sempre si pone che

ad 1 corrisponde 13

si divida per 2, per 4, per 8.

$$\begin{array}{ccl} & 1 & 13 \\ & \overline{2} & 6\ \overline{2} \\ & \overline{4} & 3\ \overline{4} \\ / & \overline{8} & 1\ \overline{2}\ \overline{8} \end{array}$$

Poiché all'$\overline{8}$ di 13 corrisponde un valore inferiore a 2 si cerca $C13.\overline{8}$ che è $3.\overline{8}$. Dato che $3.\overline{8} = 2.\overline{8} + 1.\overline{8} = \overline{4} + \overline{8}$, si scrive la divisione di $\overline{4}$ e di $\overline{8}$ per 13. Il risultato di 2/13 è $\overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$.

$$\begin{array}{ccc} / & \overline{52} & \overline{4} \\ / & \overline{104} & \overline{8} \end{array}$$

Nello stesso modo vengono calcolate le altre decomposizioni. C'è da osservare che variando il termine frazionario della colonna di sinistra a cui corrisponde nella colonna di destra il *primo* valore inferiore a 2 (compare cioè 1 più un insieme di termini frazionari) la decomposizione non è univoca, come si può vedere dal confronto di due decomposizioni di 2/15:

$$\begin{array}{ccl} & 1 & 15 \\ & \overline{2} & 7\ \overline{2} \\ & \overline{4} & 3\ \overline{2}\ \overline{4} \\ / & \overline{8} & 1\ \overline{2}\ \overline{4}\ \overline{8} \\ / & \overline{120} & \ \ \overline{8} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccl} & 1 & 15 \\ & \overline{2} & 7\ \overline{2} \\ / & \overline{10} & 1\ \overline{3}\ \overline{10}\ \overline{15} \\ / & \overline{30} & \ \ \overline{2} \end{array}$$

La decomposizione di destra, quella dello scriba, si differenzia dall'altra, perché considera il divisore 15 prodotto di 3 e di 5.

Lo scriba Amhose ha ancora avuto modo di indicarci una chiave per la comprensione dei problemi inerenti alla decomposizione di 2/n, presentando una tabella di prova per la decomposizione di 2/35. Tenendo presente che $\overline{\overline{3}}$ equivale a 2/3, la tabella di Amhose, da leggersi da destra a sinistra, si presenta in questo modo:

$\overline{6}$	$\overline{\overline{3}}$	$\boxed{\overline{42}.}$	$\overline{6}$	1	$\boxed{\overline{30}.}$	35
		5			7	$\boxed{6}$
						$\overline{6}$ 1 · 30
						$\overline{6}$ $\overline{\overline{3}}$ · 42

L'interpretazione di questo schema risulta addirittura ovvia se si accetta di introdurre nella tecnica della decomposizione di 2/n la frazione complementare di n.ā. Questa frazione — n.ā — corrisponde al *primo* valore, inferiore a 2, che compare nella colonna di destra dello schema grafico di calcolo. Il complemento a due di n.ā, cioè (2a — n).ā deve potersi a sua volta decomporre in una somma di frazioni dell'unità. Ciò avviene a condizione che a non sia un numero primo e che (2a — n) sia equivalente ad una somma i cui addendi siano divisori di a. Ora è possibile procedere all'analisi della tabella di Amhose.

Si proceda al calcolo della decomposizione di 2/35:

Ad 1 corrisponde 35		1	35
Si divida per 5		$\overline{5}$	7
Si divida per 6	/	$\overline{30}$	1 $\overline{6}$

Il complemento di 35.$\overline{30}$ è 25.$\overline{30}$ equivalente a (10 + 15).$\overline{30}$ = $\overline{3}$ + $\overline{2}$. Si divide $\overline{2}$ per 35 scrivendo $\overline{2}$ nella colonna di destra e $\overline{70}$ in quella di sinistra. Si divide $\overline{3}$ per 35

/	$\overline{70}$	$\overline{2}$
/	$\overline{105}$	$\overline{3}$

Solo apparentemente il risultato è diverso da quello dello scriba perché

$$2 : 35 = \overline{30} \quad \left(\overline{70} \qquad \overline{105} \right)$$

equivale a $\overline{30}$ $\overline{42}$

Il calcolatore egiziano ha ottenuto il suo risultato considerando che 35.$\overline{30}$ si riduce a 7.$\overline{6}$ cioè a 1 $\overline{6}$. Il complemento di 7.$\overline{6}$ è 5.$\overline{6}$ che si decompone in (3 + 2). $\overline{6}$ = $\overline{2}$ + $\overline{3}$ = $\overline{6}$ + $\overline{3}$, frazione che viene scritta accanto a $\overline{42}$. Perciò i due termini frazionari non inquadrati sono l'uno il complemento dell'altro, (5.$\overline{6}$ + 7.$\overline{6}$ = 2), mentre $\overline{30}$ e $\overline{42}$ sono ovviamente i termini della decomposizione di 2/35. Rimane da considerare i numeri della seconda linea orizzontale, 6,7,5. Gli ultimi due (7,5) sono i numeratori dei termini frazionari complementari, il numero ausiliare scritto sotto 35 [6], non è il denominatore delle stesse frazioni, ma è il reciproco di uno dei fattori di $\overline{30}$. Il reciproco dell'altro fattore deve coincidere con il numero che viene scritto sotto l'ultima frazione dell'unità della decomposizione di 2/35.

Siamo ora in grado di leggere la prova di Amhose e di fornire per tutte le altre decomposizioni lo stesso schema di prova, durante il procedimento di calcolo attraverso lo schema grafico.

La tavola del PMR per le decomposizioni per n = 43 dà i seguenti valori:

$$\overline{42} \quad \overline{86} \quad \overline{129} \quad \overline{301}$$

Procediamo al suo calcolo fornendo contemporaneamente la procedura per lo schema di prova:

	1	43	
	$\overline{6}$	7	$\overline{6}$
/	$\overline{42}$	1	$\overline{42}$
/	$\overline{86}$		$\overline{2}$
/	$\overline{129}$		$\overline{3}$
/	$\overline{301}$		$\overline{7}$

$$C43.\overline{42} = 41.\overline{42} = (6 + 14 + 21).\overline{42} = \overline{7} + \overline{3} + \overline{2}$$

43	$\overline{42}$	1 $\overline{42}$	$\overline{86}$	$\overline{2}$	$\overline{129}$	$\overline{3}$	$\overline{301}$	$\overline{7}$
7	43		21		14		6	

$$42 \cdot 1\ \overline{42} = 86 \cdot \overline{2} = 129 \cdot \overline{3} = 301 \cdot \overline{7}$$

Lasciamo al lettore il compito di rintracciare le corrispondenze tra lo schema grafico di calcolo e quella che abbiamo denominato tabella di prova che conduce al calcolo del *minimo comune multiplo* dei reciproci delle frazioni dell'unità che sono soluzioni al problema della decomposizione di 2/n. Ciò che si richiede per la prosecuzione del calcolo attraverso lo schema grafico e per la compilazione della tabella di prova è la ricerca della frazione complementare C, ricerca che dobbiamo presupporre effettuata, ma non visibilmente indicata nei papiri.

La presentazione del problema tipico dell'aritmetica egizia riscatta questa dall'interpretazione corrente di essere semplicemente una tecnica senza alcuna consapevolezza teorica, continuando in ciò il giudizio aristotelico sulle *tecniche matematiche* della casta sacerdotale egizia. La teoria invece è presente in quanto le connessioni sintattiche sono date da una disposizione simmetrica dei segni. Il sistema formale di una comunicazione codificata in segni ideografici si esplicita nella trasmissione orale del testo, ma è implicitamente presente. Se non fosse presente nell'ordine simmetrico dei segni l'indicazione di un sistema formale insieme all'indicazione delle operazioni non saremmo ora in grado di *tradurre* nel nostro linguaggio tutta quanta la procedura di calcolo.

Il problema della decomposizione di $2/n$ per n dispari consiste nella ricerca di un monomio $F = a_1a_2 \ldots a_m$, tale che $n/F = 1 + r/F$. Se $n = 2x + 1$ F è compreso nell'intervallo $(x + 1, 2x)$. Sia il resto r $(n - F)$ sia il suo complemento $(F - r)$ devono potersi decomporre in somma di divisori di F. Questa è la condizione di risolubilità del problema tipico dell'aritmetica egizia. Seguendo lo schema grafico avremo:

$$
\begin{array}{llll}
 & 1 & n & \\
 & .. & .. & \\
 & .. & .. & \\
/ & F^{-1} & 1 + (n-F)/F & \text{Poiché } (F-r).F^{-1} = (p + q + .. + u).F^{-1} = \\
 & & & \qquad = s^{-1} + t^{-1} \ldots + z^{-1} \; (p < q .. < u) \\
 & & & \text{allora} \\
/ & (nz)^{-1} & z^{-1} & \quad n \quad F^{-1} \quad (nz)^{-1} \; \ldots\ldots \; (nt)^{-1} \quad (ns)^{-} \\
/ & \ldots & \ldots & \\
/ & \ldots & \ldots & \underline{F.p^{-1} \;\; ns/F.p^{-1} \;\; u \quad \ldots\ldots \quad q \qquad p} \\
/ & (nt)^{-1} & t^{-1} & F.\, 1 + (n-F)/F = (nz).z^{-1} = ..(nt),t^{-1} = (ns).s^{-1} = n \\
/ & (ns)^{-1} & s^{-1} & F.ns/p^{-1} = (nz).u = \ldots (nt).q = (ns).p
\end{array}
$$

Il dominio del'aritmetica egizia può essere caratterizzato in prima approssimazione come equivalente a quello del corpo P dei numeri razionali. Tuttavia si dovrebbe precisare che tale corpo veniva espresso unicamente nell'insieme N dei numeri interi e in quello dei reciproci. Non si hanno infatti rappresentazioni frazionarie ridotte dei numeri razionali e il loro calcolo, ma l'equivalente del numero razionale rappresentato, a parte l'intero, in una somma di frazioni dell'unità, rappresentazione che non è univoca. In altri termini, i concetti primitivi alla base di questa aritmetica sono quelli di *tutto* e *parte* e il numero scaturisce come relazione della parte al tutto o del tutto alla parte. Il problema che dovettero risolvere i matematici egiziani si può formulare ancora nel seguente modo: escogitare un algoritmo che permetta il calcolo nel corpo P dei numeri razionali, utilizzando unicamente due tipi di segni numerici, quello per i numeri interi e quello per i loro reciproci. L'algoritmo della decomposizione in « frazioni dell'unità » o in un insieme di reciproci degli interi non rappresenta, come potrebbe apparire, la soluzione ad uno *strano* problema, ma ad una necessità che è intrinseca alla limitazione della notazione della loro aritmetica.

Se si volesse rappresentare l'insieme degli interi con quello dei loro reciproci si potrebbe ricorrere alla seguente rappresentazione:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(\ldots\ldots 1, & \ldots & 1, & 1, & 1, & 1, & \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots\ n\ \ldots\ldots) \\
\bar{n} & & \bar{5} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} &
\end{array}
$$

Quando si legge in Giamblico che alcuni Pitagorici consideravano l'unità come « confine del numero e delle parti » è difficile non pensare che non si riferissero precisamente ad una tale rappresentazione o per lo meno ad un'altra simile a questa. Infine la rappresentazione a forma di *lambda* ricordata da Giamblico si riferisce ad un ordinamento dell'insieme degli interi e dei loro reciproci.

Sullo sfondo di questa aritmetica la scoperta greca del « numero irrazionale », la scoperta cioè che tale numero non è « parte » di un tutto, ma il limite di una successione alternata di rapporti maggioranti e minoranti, di rapporti in eccesso e in difetto, si configura come la crisi di tutto quanto l'edificio millenario della scienza arcaica. Dalla scoperta degli *irrazionali* data la nascita del metodo assiomatico e il ricorso sistematico al linguaggio della geometria. Solo con Eudosso e con l'antica Accademia platonica vi sarà il tentativo di una trattazione adeguata dell'ἀριθμός, con quella dottrina, testimoniata da Aristotele, del *numero sensibile*, del *numero matematico* e del *numero intellegibile*, che corrisponde ai tre insiemi costituenti il numero reale, l'intero, il razionale, l'irrazionale. Solo in seguito allo studio dell'aritmetica egizia ci è stato possibile rinvenire nelle testimonianze aristoteliche intorno al problema della « generazione dei numeri » almeno tre stadi nella trattazione di questo problema, quello pitagorico, quello eudossiano e quello platonico.