



EDIZIONI PISANE DI STORIA E D'ARTE

3

L'ITALIA ED I PAESI MEDITERRANEI

*Vie di comunicazione e scambi commerciali e
culturali al tempo delle Repubbliche Marinare*

1988

NISTRI-LISCHI E PACINI EDITORI

LEONARDO FIBONACCI E IL RINNOVAMENTO DELLE MATEMATICHE

di Carlo Maccagni

Collocare il Fibonacci nella storia delle matematiche è da un lato cosa molto semplice, perché è unanime il giudizio, assolutamente da condividere, che lo indica come il massimo matematico di tutto il Medioevo occidentale, e dall'altro molto complessa, solo che si voglia dare una soddisfacente risposta ai tanti quesiti posti sia dallo studio delle sue opere circa la tradizione testuale, i criteri di edizione e di lettura, le fonti, la cronologia..., sia da un riesame della relativa storiografia, abbondante e ripetitiva, costituitasi per lo più in forma agiografica e su illazioni arbitrarie, da ricondursi invece con occhio attento e mano leggera a versioni meglio compatibili con le poche notizie che si possono trarre effettivamente dagli scarsi documenti. A una sommaria esposizione di tali questioni — destinate a restare allo stato di problemi perché non ho soluzioni da offrire, ma solo il suggerimento di trasformarle in programmi di lavoro — sarà dedicata buona parte di questa relazione.

* * *

Le notizie che riguardano il Fibonacci possono desumersi da accenni a vicende personali presenti nelle sue stesse opere — la più estesa e significativa, che vedremo analiticamente, all'inizio del *Liber abaci* —, da date di composizione o di revisione dei testi riportate dalla tradizione manoscritta nell'intitolazione di alcuni trattati, e infine da due documenti: una delibera del Comune di Pisa, databile tra il 1233 e il 1241, di riconoscimento dei meriti del matematico per l'amministrazione dello stato, trovata da Francesco Bonaini e da lui pubblicata nel 1857 e riprodotta nella lapide murata nell'atrio dell'Archivio di Stato di Pisa nel 1865; e un atto notarile del 1226 con qualche informazione sulla famiglia di Leonardo utile a chiarire la questione del cognome, rinvenuto da Gaetano Milanesi e da lui stampato nel 1867.

Già sull'appellativo Bigollo e sul cognome Fibonacci erano state costruite tante infondate illazioni, enfatizzate dal Guglielmini nel suo *Elogio* e riprese dai Libri, delle quali appunto hanno fatto giu-

stizia il Bonaini e il Milanese chiarendo definitivamente che con il termine di Bigollo i Pisani non intendevano affatto recare offesa a Leonardo — anche se per il vocabolo non si è ancora raggiunta una spiegazione del tutto sicura e convincente —, che suo padre non si chiamava *Bonaccius* ma *Guilielmus*, e che quindi il *de filiis Bonaccii* o *filiorum Bonaccii* voleva solo rendere in latino il nome di famiglia volgarizzato in Fibonacci. Ciò appare soprattutto confermato dal documento edito dal Milanese che sembra una sistemazione in famiglia di qualche pendenza di eredità, cui intervengono: *Bartholomeus quondam Alberti Bonaccii cedente Leonardo Bigollo quondam Guilielmi procuratori...Bonaccinghi germani sui la duodeciman partem integram pro indiviso unius petii terre...:* dove meritano di essere sottolineati il cognome *Bonaccii* del cedente e il nome *Bonaccinghus* del fratello di Leonardo, che può essere un'ennesima testimonianza della consuetudine, da secoli ampiamente attestata in Toscana, di ricorrere per i nomi a una forma iterativa più o meno modificata del cognome. Circa il nome con cui il matematico è oggi ricordato, possiamo notare che nell'uso restano consolidate sia la forma Leonardo Pisano, come più abituale e diffusa, sia quella Leonardo Fibonacci, presso che l'unica impiegata dai matematici e nelle storie della matematica: ben di rado ormai ricorre il tanto vituperato Bigollo che pur seguiva il nome di Leonardo in quasi tutte le testimonianze antiche.

Passando alla cronologia si presentano altre questioni, in quanto di lui sono ignote le date di nascita e di morte, ed anche quelle legate alle opere e tramandate dalla tradizione manoscritta dei trattati non sono sempre convincenti. È comunque possibile definire con qualche sicurezza il periodo in cui egli fu attivo, da collocarsi tra il 1202, anno concordemente indicato dai codici per la composizione del *Liber abaci*, e il 1233-1241, intervallo in cui dovette essere presa la delibera del Comune di Pisa, trovata dal Bonaini, e così databile in quanto la medesima è riportata in calce al *Constitutum Pisanum legis et usus* secondo la revisione del 1233, tra le aggiunte fattevi nel 1241 essendo podestà Ugolino di Ugone Rossi. In base a questi pochi elementi affidabili si definiscono poi congetturalmente la data di nascita tra il 1170 e il 1175 e quella di morte posteriormente al 1241: in sostanza si può dire che l'anno 1200 si ponga come confine tra le fasi formativa e produttiva della vita del Fibonacci, svoltasi a cavallo dei due secoli.

Come è noto, il secolo XII vede la prima «rinascita» dell'Occidente latino, che, come tutte le rinascite, avviene attraverso grandi cambiamenti e investe, in particolare in Italia, ogni settore: politico-militare, economico, sociale, religioso e culturale..., con i comuni e le repubbliche marinare, le lotte tra papato e impero, le crociate, la nascita delle corporazioni, lo sviluppo dei traffici specie nel Mediterraneo con la costituzione di colonie sulle coste dall'Africa al Mar Nero e alla Grecia, gli inizi della letteratura in volgare, il ricupero della tradizione classica, secondo la mediazione delle versioni arabe, e dell'araba in forma diretta, soprattutto per la filosofia e per le scienze, la fondazione delle prime università con lo studio del diritto, della medicina e la filosofia scolastica: tale generale risveglio continua a svilupparsi e a diffondersi anche nel Duecento dando frutti copiosi.

Considerando in particolare il settore scientifico, con il XII secolo perde importanza la limitata cultura dei compendi tardoantichi di Boezio o dello pseudo-Boezio sulla musica, l'aritmetica e la geometria o delle compilazioni enciclopediche come le *Etimologie* di Isidoro, che fino ad allora aveva dominato; si rinsangua la tradizione del trivio e del quadrivio che da schema didattico di organizzazione del sapere per il singolo viene istituzionalizzato come struttura universitaria; e soprattutto si diffonde l'attività dei traduttori dall'arabo e, in minor misura, dal greco, fino a costituire dei veri e propri centri specializzati, tra i quali primeggia Toledo dove domina la figura di Gerardo da Cremona con una sua attivissima scuola.

Le traduzioni dall'arabo e dal greco compiute lungo il XII secolo, a partire dal terzo decennio divenendo via via sempre più numerose, costituiscono il massimo contributo al rinnovamento della cultura latina occidentale tanto per la varietà e ricchezza dei contenuti che per la massiccia quantità dei testi resi così disponibili, sono un punto di riferimento per definire le conoscenze scientifiche del tempo e meritano qualche cenno più ampio anche per meglio comprendere la figura del Fibonacci.

Per quanto riguarda le versioni dal greco si può ricordare un solo centro: la corte di Palermo sotto Guglielmo I (1154-1166), dove un gruppo di studiosi, tra i quali l'arcidiacono Enrico Aristippono e l'ammiraglio Eugenio, tradusse dal greco in latino l'*Almagesto* di Tolomeo, gli *Elementi* di Euclide e alcuni dialoghi di Platone, nonché l'*Ottica* di Tolomeo dall'arabo. Questi lavori, come pochi altri dovuti all'isolata attività di singoli studiosi che vivevano di solito

oltremare o erano in rapporto con il mondo bizantino — tra i quali vorrei citare almeno i fratelli pisani Leone Tosco e Ugo Eteriano a Costantinopoli e il grande Burgundione —, furono ben poca cosa in confronto alla massa delle traduzioni dall'arabo ed ebbero nella cultura del tempo una scarsa risonanza: in quei secoli infatti l'Occidente era tutto teso ad emulare la civiltà musulmana e ad imitarla.

Per le versioni dall'arabo — per le quali vorrei ricordare ancora tra i primissimi due pisani, traduttori del trattato medico di Ali ben Abbas: Rustico nel 1114 durante la spedizione a Majorca e Stefano d'Antiochia nel 1127 — la patria d'elezione è la Spagna e in particolare le regioni settentrionali via via che vengono sottratte al dominio islamico: qui dal 1125 al 1150 operano Adelardo di Bath, Platone di Tivoli, Roberto di Chester, Ermanno di Carinzia, Domenico Gundisalvi, Ugo di Santalla, Savasorda, Giovanni di Siviglia, Abraham ben Ezra... Essi dedicano la loro opera a testi scientifici — di aritmetica, geometria, algebra, astronomia-astrologia, medicina —, filosofici e teologici. Per limitarci ai campi dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria nei quali fu attivo Leonardo, ricordo che Platone di Tivoli traduce il *Liber embadorum* di Savasorda e il *De mensura circuli* di Archimede, Roberto di Chester la prima parte dell'*Algebra* di al-Khwārizmī e il *Liber de algebra et almucabala* di Abū Kāmil, Adelardo di Bath gli *Elementi* di Euclide, di cui dà pure una seconda versione riveduta, e l'*Arithmetica* di al-Khwārizmī, traduzione attribuita anche al medico ebreo spagnolo Pedro Alfonso e a Giovanni di Siviglia. Poco dopo la metà del secolo a Toledo, dove si era recato «amore *Almagesti* quem apud Latinos minime reperiit», Gerardo da Cremona comincia la propria attività che si concluderà con la morte nel 1187. Operosissimo, organizzando il lavoro di allievi e collaboratori, riuscì a tradurre quasi un centinaio di testi in ogni campo dello scibile, portando al mondo latino una enorme massa di conoscenze che non solo forgiò il sapere medievale, ma produsse risultati così radicati e durevoli da non essere del tutto soppiantati dagli sforzi dell'Umanesimo e del Rinascimento di riportare la cultura occidentale alle originali fonti greche. Per rimanere nel settore disciplinare cui si dedicò Leonardo, giova ricordare che Gerardo dette nuove versioni dell'*Algebra* e dell'*Arithmetica* di al-Khwārizmī, del *Liber de algebra et almucabala* di Abū Kāmil, degli *Elementi* di Euclide e del *De mensura circuli* di Archimede, e tradusse per la prima volta il *De figura alchata* di Thābit, la *Geometria* dei Banū Mūsā, il *De proportionibus et proportionalitate* di Ahmad ibn

Yūsuf, il *Liber Iudei super X librum Euclidis* (che è un frammento del commento di Pappo), il *Liber de practica geometriae* di al-Karajī, il commento a Euclide di al-Nayrīzī, i *Data* di Euclide, il *Liber divisionum* di al-Bagdādī (che riprende un'opera perduta di Euclide), l'*Algorismus de integris* (che può essere un rifacimento dell'*Arithmetica* di al-Khwārizmī).

Si tratta di testi fondamentali per la geometria, l'aritmetica e l'algebra — manca solo Diofanto —, che sono poi le discipline studiate dal Fibonacci; ma questo non ci autorizza a ritenere — come pure è stato fatto — che quelle siano le fonti di Leonardo: dovremmo, infatti, preliminarmente sapere — ma non possiamo avere risposte soddisfacenti — quanto e come circolavano i libri in quei tempi, come erano accolte ed assimilate le novità, e se quei testi poterono giungere fino a lui, tanto più che egli non li cita mai in forma esplicita; inoltre, ammesso che quelle opere siano state le sue fonti, se utilizzò le versioni o ricorse agli originali, cosa sempre difficile da stabilire quando trattasi di opere di matematica e ancor più quando siano state tradotte, come nella maggior parte dei casi ricordati, quasi *de verbo ad verbum*: si aggiunga che la formazione del Fibonacci appare dalle sue stesse parole essersi compiuta — come vedremo — in paesi di cultura islamica più che latina; infine, il tentativo di risalire alle sue fonti è complicato dalla difficoltà di accertare quali lingue fossero conosciute da Leonardo.

L'individuazione delle fonti è la prima delle questioni aperte — cui facevo riferimento all'inizio —, ed è di difficile soluzione non solo per le ragioni appena accennate, ma anche perché, più in generale, non si possono considerare esaurientemente esplorate le situazioni culturali corrispondenti sui due versanti, latino e arabo, che continuano ad essere visti separatamente anche per questo periodo; per entrambi poi si è badato poco alle matematiche applicate, e soprattutto per il secondo non si è ancora saputo tracciare una sintesi sufficientemente ampia e articolata che mostri connessioni e sviluppi, essendo gli studi dedicati presso che esclusivamente alla ricerca e all'edizione di singoli testi, isolatamente. Tuttavia, quali possano essere comunque state le fonti del Fibonacci, va senz'altro sottolineata una differenza essenziale tra Leonardo e i traduttori: questi ultimi, anche se ovviamente interessati alle scienze, ben di rado vanno al di là di un corretto lavoro di versione arreando contributi nuovi alle varie discipline, mentre egli riprende e amalgama i contenuti delle opere elaborate in precedenza, e soprattutto ne sviluppa

le potenzialità in forma originale con maestria e acume tali che i risultati da lui raggiunti non solo rappresentano un netto avanzamento rispetto al passato e all'età sua, specie nell'ambito della cultura occidentale, ma in molti casi, e segnatamente per la teoria dei numeri, potranno essere perfettamente compresi e superati solo dopo secoli.

* * *

All'inizio del *Liber abaci*, «compositus in anno MCCII» — come riporta concordemente la tradizione manoscritta —, l'autore si presenta al lettore con le seguenti parole.

Cum genitor meus a patria publicus scriba in duana Bugee pro Pisanis mercatoribus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies stare voluit et doceri. Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit, et intellexi ad illam, quod quicquid studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis postea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum. Sed hoc totum etiam et algorismum atque arcus Pictagore quasi errorem computavi respectu modi Indorum. Quare amplectens strictius ipsum modum Indorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam ex subtilitatibus Euclidis geometrice artis apponens, summam huius libri, quam intelligibilius potui, in XV capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia que inserui certa probatione ostendens, ut extra perfecto pre ceteris modo hanc scientiam appetentes instruantur, et gens Latina de cetero, sicut hactenus, absque illa minime inveniatur. Si quid forte minus aut plus iusto vel necessario intermisi, mihi deprecor indulgeatur; cum nemo sit qui vitio careat, et in omnibus undique sit circumspectus».

Egli, dunque, in un momento imprecisato del secolo che vide affermarsi la potenza del Comune di Pisa in tutto il suo splendore — attestato dallo sviluppo urbano e architettonico, culturale e artistico, politico e militare, marittimo e commerciale —, lascia la patria, essendo ancora fanciullo (*in pueritia mea*), per raggiungere il padre che era funzionario (*publicus scriba*) della dogana nella colonia dei Pisani a Bugia, sulla costa africana a circa 175 chilometri a oriente di Algeri.

Per la data di questo viaggio che doveva portare Leonardo in

contatto con il mondo musulmano, gli storici di solito propongono l'anno 1192 senza motivare le ragioni di tale scelta, che sembrano tuttavia doversi connettere ad una supposta fase di tranquillità e di ripresa dei traffici commerciali pisani nel Mediterraneo, conseguente alla pace con Saladino stipulata dai Crociati proprio in quell'anno a chiusura delle tristi vicende che avevano portato alla fine del regno di Gerusalemme e alla terza crociata. Tale data però, stante l'affermazione dello stesso Fibonacci di essersi recato a Bugia quando era ancora fanciullo, è in contrasto con quella di nascita, usualmente collocata intorno al 1170, che appare abbastanza plausibile o addirittura da anticiparsi di qualche anno, se si considera — a ragione — essere il *Liber abaci*, del 1202, un'opera che per dimensioni e contenuto abbisogna di un lungo periodo di assimilazione delle conoscenze, di elaborazione e sviluppo della materia e, infine, di stesura del trattato.

Tuttavia, qualunque possa essere stata la data del trasferimento, è certo che in questa città, viva di fermenti politico-religiosi, culturali e commerciali, con intensi rapporti verso i centri d'oltremare tanto musulmani di Spagna che cristiani di Sicilia e d'Italia, Leonardo compì la sua formazione, molto verosimilmente traendo profitto da entrambe le culture: la latina — di cui doveva aver già avuto i primi rudimenti a Pisa — dei residenti nella colonia dei mercanti, e l'araba dei dominatori locali. Valutare le due componenti è questione — come si è accennato — di difficile soluzione: penso comunque che, anche per queste sue vicende, possa darsi per scontata una sua buona conoscenza della lingua araba.

Le successive righe del testo meritano qualche precisazione preliminare di termini e di concetti, in particolare per *abacus* (o *abacus*, secondo la grafia adottata dal Fibonacci), *arcus Pictagorae*, *algorismus* e *novem figurae Indorum*.

L'*abacus*, già nell'Alto Medioevo detto pure *mensa pythagorica*, è la ben nota tavoletta — in origine ricoperta di polvere o di sabbia su cui scrivere, e poi evolutasi in varie forme tali comunque da permettere l'esecuzione di calcoli meccanicamente, senza scrivere — usata in diverse fogge per molti secoli e ancora oggi largamente impiegata, nel tipo per così dire a pallottoliere, in Russia e in Estremo Oriente. Il termine, se connesso al successivo *arcus Pictagorae*, indica il particolare tipo di abaco descritto da Gerberto d'Aurillac, papa Silvestro II, alla fine del X secolo, strumento di calcolo ben noto soprattutto nell'Occidente latino. Si trattava di una tavoletta

divisa in colonne verticali raggruppate in alto da un arco — donde il nome — a tre a tre (unità, decine e centinaia, e unità, decine e centinaia di migliaia...) per la serie naturale dei numeri, o per i sottomultipli e i multipli di una determinata unità di misura (monete, pesi, lunghezze, volumi...); per eseguire le operazioni nelle colonne venivano collocati dei gettoni, con l'indicazione del valore, in sostituzione delle più antiche pietruzze (*calculi*), ciascuna delle quali valeva un'unità. L'abaco, insieme alla tavoletta ricoperta di polvere — che solo sul finire del XIV secolo fu sostituita dalla lavagna e più tardi dalla carta —, era di normale uso per far di conto, in particolare nella bottega dei mercanti latini e arabi d'Occidente; mentre era presso che sconosciuto in Oriente e a Bisanzio. Tali modi di calcolare erano dovunque praticati sempre in unione ai procedimenti di calcolo mentale e digitale; questi ultimi erano anche impiegati in combinazione: le operazioni erano eseguite mentalmente, utilizzando le dita per rammentare i risultati parziali.

Pare legittimo ritenere che nel testo il termine *abacus* non indichi solo le tecniche di esecuzione delle operazioni con lo strumento, ma anche i rudimenti dell'aritmetica necessari per compierle e per risolvere problemi elementari di computo commerciale; trattavasi comunque di un corpo di conoscenze non molto ampio se Leonardo fu messo a studiarlo soltanto *per aliquot dies*: il che sembra essere però una durata troppo breve per un fanciullo, anche se genio della matematica — più verosimilmente, penso che l'espressione non vada presa in senso letterale —.

Il termine *algorismus*, che ha avuto una notevole fortuna nel linguaggio dei matematici, è in realtà il prodotto di un equivoco risalente al titolo della traduzione dell'*Arithmetica* di al-Khwārizmī: *Liber Algorismi (o Algoritmi) de numero Indorum*. La traslitterazione latina del nome dell'autore, infatti, fu assunta e si diffuse — specie con la grande circolazione delle successive rielaborazioni del trattato compiute da Giovanni Sacrobosco (*Algorismus vulgaris*) e da Alessandro de Villa Dei (*Carmen de algorismo*) —, come indicazione del contenuto, divenendo quindi sinonimo di aritmetica, non necessariamente espressa in cifre indiane.

Il trattato di al-Khwārizmī — perduto nell'originale composto intorno all'830 e sopravvissuto solo nella versione e nei rimaneggiamenti latini già ricordati — è la prima opera araba dedicata ad illustrare i numerali indiani secondo il sistema decimale posizionale — le nove cifre significative e lo zero — e l'uso dei medesimi per

le quattro operazioni, l'estrazione della radice quadrata e le frazioni normali e sessagesimali, con esempi di applicazione per la soluzione di semplici problemi: in sostanza, un manuale elementare di aritmetica, importante soprattutto per aver diffuso il nuovo sistema di numerali.

Gli Arabi avevano un proprio sistema alfanumerico, analogo a quello greco ed ebraico, di scrittura dei numeri, in origine a base sessagesimale, in cui le ventotto lettere dell'alfabeto — secondo una successione che non è l'attuale — rappresentavano rispettivamente le nove unità da 1 a 9, le nove decine da 10 a 90, le nove centinaia da 100 a 900, e il 1000: onde il nome di *abjad* (equivalente al nostro abici). Tale sistema, usato in campo tanto astronomico e scientifico che amministrativo e commerciale, fu soppiantato solo in tempi relativamente recenti dai numerali indiani che rimasero a lungo poco più di una curiosità, benché già noti da un secolo prima della composizione del trattato di al-Khwārizmī, ed è tuttora impiegato per quei casi in cui noi ricorriamo ai numeri romani. Nel mondo arabo occidentale, magrebino e iberico, la storia delle cifre indiane si confonde con quella delle cifre *ghubar* (letteralmente: per la sabbia).

Queste erano note anche tra i Latini, come attesta, ad esempio, il trattato sull'abaco di Gerberto, benché per diffusione e impiego fossero molto più ampiamente usati i numeri romani, tanto da essere gli unici a ricorrere persino in alcuni dei più antichi manoscritti del *Liber Algorismi de numero Indorum* — come il codice Ii. 6. 5 della Cambridge University Library, edito dal Boncompagni — e nella maggior parte di quelli dell'*Algebra* di al-Khwārizmī.

Noto incidentalmente che la storia della diffusione dei numerali indiani tanto in Oriente che in Occidente è ben lungi dall'essere chiarita, ed è molto più complessa e problematica rispetto agli sviluppi lineari che di solito sono esposti nelle storie della matematica.

Riprendendo la lettura del proemio di Leonardo, risulta dunque che dall'insegnamento dell'ottimo suo maestro di abaco (*ex mirabili magisterio*) fu introdotto anche all'aritmetica in cifre indiane, e ne fu così conquistato che viaggiando per i centri commerciali di Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, cercò di approfondirne la conoscenza sia con lo studio dei vari modi secondo i quali era localmente trattata la disciplina, sia attraverso discussioni con maestri ed esperti svolte anche secondo il tipico costume medievale della *quaestio*. Ad alcune di queste dispute fa poi preciso riferimento negli scritti: ad esempio nel *Liber abaci* (p. 188 e 190), dove ricorda anche (p. 249)

una «questio nobis proposita a peritissimo magistro Musco constantinopolitano in Constantinopoli», riferendo pure il nome dello sfidante — personaggio reputato allora peritissimo, ma oggi ricordato solo per questa citazione.

Il sapere così acquisito — dalla frequentazione dei dotti e non, come avventatamente talvolta si dice, dei mercanti d'Oriente e d'Occidente — lo indusse a ritenere *quasi errorem* tanto l'aritmetica praticata meccanicamente con l'abaco — mai considerata nei suoi scritti — che l'algorismo. Credo che quest'ultima avversione sia dettata almeno da due ragioni. Anzitutto si può legittimamente pensare — anche per quanto si è detto —, che l'algorismo di cui egli era a conoscenza non usasse i numerali indiani e quindi non potesse avvalersi dei vantaggi della numerazione decimale posizionale di cui fu sempre convintissimo assertore. Egli poi, dell'algorismo non sembra approvare la tecnica seguita nello scrivere materialmente i calcoli, che erano tracciati sulla tavoletta a polvere, cancellandosi via via i vari passaggi per far luogo ai successivi: «loco delete figure in pulvere...». Tale procedimento — come l'uso dell'abaco, d'altronde — non permette infatti di seguire documentatamente e controllare tutto lo svolgimento del calcolo: così che egli dei modi allora consueti per far i conti — abaco, tavoletta a polvere, computo digitale e mnemonico —, accoglie solo gli ultimi due, in quanto considerati di supporto al calcolo scritto stabilmente, con la penna, e pertanto dedica sempre molta attenzione alla descrizione dell'impostazione e dell'esecuzione materiale dei conti. Il principio è perentoriamente espresso nel *Liber abaci* (p. 87): «et si hec que de divisione ... dicta sunt crebro studio in tabula scribendo firmaveris, ea cordetenus in manibus, ea levissime poteris operare». Innovazione di non poco rilievo, in cui può vedersi in germe quell'attitudine alla scrittura che il mercante italiano svilupperà enormemente, per necessità professionale prima e per costume poi, proprio a partire dai tempi del Fibonacci.

L'ultimo brano indica succintamente come è stato elaborato il trattato: oltre alla raccolta delle conoscenze acquisite presso Arabi, Greci e Latini, vi confluiscono suoi apporti originali (*ex proprio sensu quedam addens*) e alcune «sottigliezze» desunte dagli *Elementi* di Euclide (specialmente dal libro X, per il quale il Fibonacci scrisse un commento, oggi perduto). Circa il modo di esposizione ha trattato la materia secondo un rigoroso procedimento dimostrativo (*certa probatione*), affinché la disciplina possa essere correttamente e per-

fettamente appresa: sono osservazioni metodologiche rilevanti, intese a sottolineare il carattere scientifico dell'opera, che pure è svolta attraverso una serie di esemplificazioni secondo la tradizione diofantea, quasi a distinguerla dai manuali esclusivamente volti alla pratica e quindi ridotti ai soli aspetti applicativi. Si può aggiungere che per gradualità, chiarezza, precisione e completezza il *Liber abaci* è anche un testo di elevato valore didattico. Il Fibonacci, infine, è pure conscio della novità e dell'importanza della materia per la cultura latina, dove, ad eccezione del suo trattato, ben poco è dato trovare in merito.

L'opera ebbe una seconda edizione a cura dell'autore stesso — «correctus ab eodem anno MCCXXVIII» — come riporta la tradizione dei manoscritti, e fu dedicata a Michele Scoto, appena assunto, nel 1227, ai servizi di Federico II. Come apprendiamo dalla dedica al filosofo e astrologo imperiale, questi aveva chiesto al Fibonacci una copia dell'opera e ciò dette occasione all'autore di rivedere l'intera materia: «Scripsistis mihi, domine mi magister Michael Scotte, summe philosophe, ut librum de numero, quem dudum composui, vobis transcriberem: unde vestrae obsecundans postulationi, ipsum subtiliori perscrutans indagine ad vestrum honorem et aliorum multorum utilitatem correxi. In cuius correctione quedam necessaria addidi, et quedam superflua resecaui».

* * *

Un unico evento della vita del Fibonacci è ripetutamente ricordato nei suoi scritti: la sua presentazione all'imperatore Federico II, con conseguenti successivi riferimenti all'Imperatore stesso e a personaggi della corte in dediche e citazioni.

Tale fatto ebbe luogo durante la prima visita di Federico II a Pisa, che si svolse nel Luglio 1226; mentre — al contrario di quanto narra pittorescamente il Roncioni — è senz'altro da escludere un precedente passaggio nel 1220 in occasione del viaggio a Roma per l'incoronazione, che avvenne invece lungo l'Adriatico per la via Romea. È opportuno individuare con sicurezza tale data per meglio esaminare varie questioni relative alla cronologia delle opere di Leonardo.

Il riferimento più preciso alla presentazione è contenuto all'inizio del *Liber quadratorum*: «Cum magister Dominicus pedibus celsitudinis vestre, princeps gloriosissime domine Frederice, me Pisis duceret presentandum, occurrens magister Iohannes Panormitanus

questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem»; in questa medesima occasione o nei giorni successivi dovettero essere discusse diverse questioni matematiche con il medesimo notaio di corte Giovanni da Palermo, poiché ad esse il Fibonacci fa più volte riferimento negli opuscoli. Dalla citazione risulta che Leonardo fu introdotto presso l'Imperatore a Pisa durante la visita predetta, da certo maestro Domenico, lo stesso cui è dedicata la *Pratica geometriae* — «Rogasti amice Dominice et reverende magistre ut tibi librum in pratica geometriae conscriberem...» —, attribuita dalla tradizione manoscritta all'anno 1220 o al 1221; data che non può essere meglio precisata; comunque, il trattato è ricordato come già composto nella dedica a Michele Scoto dell'edizione riveduta nel 1228 del *Liber abaci*: «Verum in alio libro, quem de practica geometrie composui, ea que ad geometriam pertinent et alia plura copiosis explicavi, singula subiectis approbationibus geometricis demonstrando».

Non si sa chi sia il citato maestro Domenico: di solito è considerato un personaggio del seguito imperiale, stante la parte che ebbe nella presentazione e grazie all'accettazione dell'errata cronologia del Roncioni, che permetteva così di porre in coincidenza la visita di Federico II a Pisa e l'ultimazione della *Pratica geometriae*, «opus iam dudum inceptum». Ancora, come membro della corte egli era anche tentativamente identificato con un altrimenti sconosciuto Dominicus Hispanus, in quanto l'astrologo contemporaneo Guido Bonatti lo cita insieme al filosofo imperiale Michele Scoto: in realtà, nessun maestro Domenico è ricordato nei documenti di Federico II, dove pure compaiono puntualmente altri personaggi citati dal Fibonacci, come Teodoro e il già ricordato Giovanni da Palermo. Forse conviene dare fiducia alla tradizione manoscritta, accettando sia la data della *Pratica geometriae*, però tenendola separata dalla presentazione di Leonardo all'Imperatore, sia il fatto che maestro Domenico resti una figura evanescente, senza altri riscontri al di fuori delle citazioni del Fibonacci.

Il *Liber quadratorum* a sua volta presenta qualche problema per la collocazione cronologica: infatti, il codice ambrosiano E. 75 sup. edito dal Boncompagni, ne riporta la data «anni MCCXXV», difficilmente conciliabile con il fatto che in esso si ricorda, nei termini sopra riferiti, la presentazione all'Imperatore avvenuta sicuramente nel 1226. Inoltre, un brano della dedica a Federico II indica chiaramente che la stesura avvenne in un tempo successivo a tale

evento: «Nuper autem cum relationibus Pisis positis et aliorum redentium ab imperiali curia, intellexerim quod dignatur vestra sublimis maiestas legere super librum quem composui de numero — *Liber abaci*, evidentemente nella prima edizione — et quod placet vobis audire aliquotiens subtilitates ad geometriam et numerum contingentes, remorans in vestra curia et a vestro phylosopho supra-scriptam mihi propositam questionem, ab ea sumpsi materiam et opus incepti ad vestrum honorem condere infrascriptum, quod vocari librum volui quadratorum...». A ulteriore conferma l'opuscolo è citato come già composto — «Probavi enim geometrice, que hic sunt dicta de collectionibus quadratorum in librum quem de quadratis scripsi» — nell'edizione del *Liber abaci* del 1228. Inoltre, nel *Flos* — un altro dei tre opuscoli superstiti del Fibonacci, insieme all'*Epistola ad magistrum Theodorum* e, appunto, al *Liber quadratorum* tramandati dal solo manoscritto ambrosiano E. 75 sup. già ricordato — si parla di quest'ultimo al futuro, come di un'opera in corso di stesura, benché ne sia già stato divisato il contenuto e previsto il titolo: «Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predictae questionis — una di quelle postegli a Pisa da maestro Giovanni in presenza dell'Imperatore — solutio, inveni ipsam habere originem ex multis accidentibus que accidunt quadratis numeris et inter quadratos numeros; quare hinc sumens materiam libellum incepti componere ad vestre maiestatis celsitudinis gloriam, quem libellum quadratorum intitulavi, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predictae et multarum aliarum questionum solutiones, quem habere poterit vestra immensitas, si celsitudini vestre placuerit». Mi pare quindi che, per gli espliciti riferimenti negli scritti del Fibonacci stesso, si possa adottare il 1228 come *terminus ante quem* per la composizione del *Liber quadratorum* e un'epoca posteriore al Luglio 1226 come quello *post quem*. Né a ciò credo si opponga validamente la data 1225 indicata dal codice ambrosiano, che è contro l'evidenza dei fatti accertati e che, tra l'altro, non permette alcun riscontro nella tradizione testuale, essendo il manoscritto in questione, almeno fino ad ora, l'unico testimone.

I problemi relativi alla datazione del *Flos* appaiono ancora più complessi, in quanto, a mio avviso, è da reputarsi un'opera composta, ove sono confluite parti redatte in occasioni e tempi diversi e su argomenti non omogenei, materialmente riuniti per offrirli insieme — *compositum florem*, come dice Leonardo stesso — al cardina-

le Ranieri Capocci, cui l'opuscolo è dedicato: «Intellecto, beate pater et domine venerande R[anerii] Dei gratia sanctae Mariae in Cosmidin diac. card. dignissime, quod meorum operum copiam non preceptive saltim, quod vos magis decebat, sed simpliciter petere fuistis per litteras vestre sanctitatis dignati; nihilominus tamen petitionem ipsam reverenter suscipiens in mandatis, non solum parere voto vestro sattegi devotius in hac parte, verum etiam de quarundam solutionibus questionum a quibusdam philosophis serenissimi domini mei Caesaris, et aliis per tempora mihi oppositarum, et plurium que subtilius quam in libro maiori de numero, quem composui, sunt solute, ac de multis quas ipsemet adinveni ex diffusa quidem multitudine compilans hunc libellum ad laudem et gloriam nominis vestri compositum florem ideo volui titulari...».

In relazione agli argomenti svolti, l'opuscolo risulta agevolmente divisibile in due parti: la prima, che il Fibonacci inizia rivolgendosi all'Imperatore, comprende due questioni postegli da Giovanni da Palermo a Pisa in presenza del medesimo; dell'una si dà solo la soluzione, essendo la discussione trattata nel *Liber quadratorum* che Leonardo stava stendendo — come si è detto — nello stesso periodo, mentre l'altra è svolta per intero.

La seconda parte appare costituita di tre nuclei, ciascuno con alcuni sviluppi: in essa sono considerati problemi di aritmetica e di algebra, mentre nella precedente erano svolte questioni relative ai quadrati. Per il primo nucleo, ancora indirizzandosi all'Imperatore, il Fibonacci dice: «Hec itaque questio, domine serenissime imperator, in palatio vestro Pisis coram vestra maiestate a magistro Johanne Panormitano mihi fuit proposita. Super cuius questionis solutionem cogitans, tres modos in solvendo ipsam inveni, quos in libro vestro, quem de numero composui, patenter inserui»; donde si deduce doversi assegnare la composizione a un periodo successivo al 1228, data dell'edizione riveduta del *Liber abaci*, l'unica in cui potevano essere inserite soluzioni di questioni discusse nel 1226.

Il secondo è pure rivolto all'Imperatore e infatti raccoglie «utramque questionem, quas per Robertinum Aggium domnicellum vestrum vestre maiestati transmisi», alle quali segue un'analogha questione «de eadem re»; in merito l'autore precisa: «Pateat quidem serenitati vestre hanc questionem a me solutam esse in tertio decimo capitulo libri mei — vale a dire il *Liber abaci* — dupliciter, sed quia huius solutionis inventio placet mihi pre ceteris modis, volui eam vestre pandere maiestati». Il riferimento è corretto, e lascia

presumere che rinvii anch'esso all'edizione riveduta del 1228: quindi, almeno l'aggiunta è da porsi dopo tale data.

Il terzo nucleo, che riprende e sviluppa l'argomento del precedente, è l'unico in cui il Fibonacci si rivolga al Capocci: «Posui hanc aliam questionem similem suprascripte questionis, sancte et venerande pater domine Ranerii dignissime card., ut que in prescripta questione dicta sunt melius clementia vestra intendere valeat»; le successive due parti sono aggiunte a svolgere temi analoghi.

Per quanto detto, il *Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometriam vel ad utrumque pertinentium* sarebbe stato prodotto senz'altro dopo il 1226, forse per la sola prima parte, e per la seconda dopo il 1228, e credo comunque per entrambe prima del 1234. Infatti, osservando come le varie parti siano indirizzate o all'Imperatore o al Cardinale, viene da pensare che, attribuendo a Leonardo un minimo di senso dell'opportunità e di percezione della situazione politica coeva, l'opuscolo sia stato composto anteriormente al guastarsi dei rapporti tra Federico II e il Capocci, accomunati nello scritto: rottura avvenuta a partire appunto dal 1234, quando l'Imperatore venne meno agli impegni dell'alleanza stipulata con papa Gregorio IX per difendere la Campagna e il Patrimonio di san Pietro contro i Romani.

Il destinatario dell'*Epistola ad magistrum Theodorum, philosophum domini imperatoris*, è un altro personaggio della corte: sa fare oroscopi e confezionare sciroppi e zucchero alla viola; come il notaio Giovanni, conosce l'arabo ed è impiegato dall'Imperatore nei rapporti con paesi musulmani, disputa di filosofia e di matematica, e ha posto a Leonardo una questione sui quadrati — «*Questio mihi proposita a magistro Theodoro, domini imperatoris philosopho*» — riportata in fine del *Liber quadratorum*, senza che sia specificato, come avviene di solito per quelle di Giovanni da Palermo, dove e in quale situazione il fatto sia accaduto.

L'*Epistola* comprende un problema «*de avibus emendis secundum proportionem datam*», già trattato nel *Liber abaci* e qui risolto sviluppando un metodo generale per la soluzione di problemi indeterminati, e uno già toccato in fine della *Pratica geometriae*. Poiché la soluzione generalizzata del problema «*de avibus emendis*» è da ritenersi successiva alla revisione del *Liber abaci*, ché altrimenti vi sarebbe stata inserita, e che al medesimo è fatto esplicito riferimento all'inizio (*in libro meo numeri*) e alla fine (*in libro meo denominato*) dell'opuscolo, l'*Epistola* è da ritenersi posteriore al 1228. Non

mi pare esistano elementi per fissare il *terminus ante quem*: non ne emergono dal testo, e circa il destinatario le poche notizie conosciute non aiutano a risolvere il problema. Il Fibonacci nella dedicatoria si indirizza a lui: «reverende pater domine Theodore, imperialis aule summe phylosophe», da cui si deduce che era già al servizio dell'Imperatore, anche se altre fonti — cronache dell'assedio di Brescia del 1238 e atti imperiali — ne attestano la presenza presso la corte solo tra il 1238 e il 1240; d'altronde, come si è detto, ha posto a Leonardo una questione riportata in fine del *Liber quadratorum*, che si è visto doversi assegnare al periodo tra il Luglio 1226 e il 1228.

Per completare questo primo tentativo — invero troppo sintetico e grossolano, che penso comunque di qualche utilità — di ordinare la cronologia degli scritti di Leonardo, ricordo che nelle sue opere sono citati almeno altri due testi oggi perduti: un manuale di aritmetica pratica per i mercanti indicato come *Liber minoris guisae* nel *Liber abaci*, in un contesto da farlo ritenere già presente nella prima edizione del 1202 e quindi da considerarsi anteriore a tale data; e un commento al libro X di Euclide. A questo Leonardo fa riferimento nel *Flos*, di seguito al brano già citato sulla composizione del *Liber quadratorum*: «Super hoc meditando — la soluzione di una questione proposta da Giovanni da Palermo — putavi huius questionis solutionem egredi ex his que continentur in X^o lib.^o Euclidis, et ob hoc super ipso X^o Euclidis accuratius studui adeo quod sinteoremata ipsius memorie commendavi, et ipsarum intellectum comprehendi. Et quia difficilior est antecedentium et quorundam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X^m librum glosare incepti, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur». Il commento, da ritenersi un lavoro preparatorio al *Liber quadratorum*, è quindi da porsi in relazione con il medesimo anche per la data di composizione, che era stata indicata tra il Luglio 1226 e il 1228.

* * *

Né queste, di tipo cronologico, sono le uniche questioni che si presentano al lettore delle opere del Fibonacci, ancora oggi accessibili solo nell'unica edizione complessiva esistente — oltre tutto di non facile reperimento nelle biblioteche —, pubblicata in due volumi, per 746 pagine in-4^o di fitta stampa, più di un secolo fa — nel 1857 e nel 1862 rispettivamente — dal pur benemerito Boncompagni, al quale va riconosciuto di avere riscoperto Leonardo, di cui

per alcuni secoli si era ormai perduta traccia. Furono i matematici e gli storici della matematica venuti dopo di lui che, interessati quasi esclusivamente all'evoluzione degli aspetti tecnici della disciplina, finirono per accordare totale fiducia all'impresa pionieristica del Boncompagni, che certamente non rassicura sull'attendibilità dei testi editi.

Infatti, nei due volumi degli scritti, le opere del Fibonacci furono pubblicate su di un solo manoscritto: rispettivamente il Magliab. Conv. soppr. C. I. 2616 (già Badia Fiorentina 73), del secolo XIV per il *Liber abaci*; il Vat. Urb. Lat. 292 del secolo XV per la *Pratica geometriae*; l'Ambr. E. 75 sup. del secolo XV per gli opuscoli. L'edizione dei testi sulla base di un solo manoscritto ha portato all'assurda situazione di dare a questi codici un valore paradigmatico di eccellenza che in realtà appare privo di ogni giustificazione, poiché la scelta — con l'eccezione dell'ambrosiano, che è testimone unico, almeno per ora, degli scritti in esso riportati ed è purtroppo mutilo in fine — appare avvenuta ad arbitrio, senza alcuna esplicita e ragionevole motivazione: fatto ancora più deplorabile perché, quanto meno per i trattati di maggior mole, erano già conosciuti al tempo del Boncompagni, così da essere da lui stesso ampiamente citati, un buon numero di manoscritti: tra completi e parziali, almeno una dozzina per il *Liber abaci* e una decina per la *Pratica geometriae*.

In realtà, l'aver adottato la via della pubblicazione di un unico codice, senza collazionarlo con gli altri e senza aver affatto studiato la tradizione manoscritta, ha reso impossibile, ad esempio, l'accertamento dei rispettivi contenuti delle due versioni del *Liber abaci*: né è da escludersi il caso fortunato di poterne trovare la prima testimoniata direttamente da qualche manoscritto, circa la quale tuttavia qualche utile indicazione poteva già venire da una lettura incrociata dell'intero *corpus*; e ancora l'individuazione di contaminazioni tra i vari scritti o di interpolazioni, delle quali anche a una prima lettura c'è più di un sospetto: come il problema di analisi indeterminata, analogo a quelli del *Liber quadratorum*, posto in fine della *Pratica geometriae* dove è assolutamente fuori posto.

D'altronde anche per altri aspetti l'edizione del Boncompagni lascia perplessi: anzitutto l'assenza di un apparato critico non credo indichi che il curatore in tutta l'opera non sia mai stato tormentato da un dubbio o da una qualche *crux* dei quali render conto, oltre a quanto indicato con qualche «(sic)» apposto a banali varianti grafiche o sviste e mai a un numero, onde sembrerebbe non esservi una

sola cifra sbagliata in tutto il *Liber abaci*, cioè in 459 pagine a stampa... In effetti, talune correzioni sono state apportate, come l'opportuna eliminazione della dittografia ai rigli 6-10 del f. 27v dell'ambr. E. 75 sup. nell'edizione del *Liber quadratorum* (II, p. 266), già suggerita dal Genocchi. Lascia poi allibiti, ad esempio, che si stampi nel *Flos* senza batter ciglio la versione offerta da due rigli (29-30 del f. 7r) del medesimo ambrosiano, dove il massimo divulgatore delle cifre indiane, qualche decennio dopo la prima edizione del *Liber abaci*, avrebbe ancora scritto: «...si de tota pecunia, q[ue] e[st] XLVII, auferantur 2 res, s[cilicet] XIII, remanebunt XXX3...», con un'incredibile presenza di cifre romane, arabe e miste, in altri punti espresse anche in parole... Sarà pure uno scrupoloso rispetto del manoscritto — e in ciò il Boncompagni nei suoi studi mostra un'attenzione, esasperata fino ad infastidire, per i particolari più minuti e formali —, ma quella scrittura, almeno per me è soprattutto una spia evidente, e meritevole di qualche considerazione, delle preoccupanti condizioni in cui il testo è stato trasmesso.

Purtroppo il *Flos* è, forse anche per la sua natura composita cui si è accennato, un concentrato di problemi pure per quanto concerne la terminologia. Ricordo solo l'uso promiscuo di *alogus*, *asam*, *surdus* e *inratiocinatus*, per quanto noi diremmo *grandezza irrazionale* o anche *numero primo*: il primo è il termine greco *ἄλογος* traslitterato, l'ultimo ne è il corrispondente concettuale in latino, il secondo è la traduzione araba del primo traslitterata in latino, il terzo è la versione latina letterale del secondo; *asamm* infatti, può farsi risalire alle più antiche traduzioni siriane del *Vangelo* di Marco, dove è narrata la guarigione miracolosa del sordomuto (*ἄλογος* come *ἄλαος*), poi passato all'arabo nel senso corrente di sordità e matematico specifico di irrazionale, quindi ripreso alla lettera dai primi traduttori latini dell'*Algebra* di al-Khwārizmī, donde è giunto fino all'inglese di oggi (*surd number*). Questo esempio, che mostra tanto la stratificazione e la commistione complesse delle fonti del Fibonacci quanto le vie, spesso tortuose, della formazione del linguaggio scientifico, indica un tipo di difficoltà del testo in questione — di cui il Boncompagni parve non accorgersi, tanto che non corresse la stampa di un glossario dei termini tecnici —, che va ad aggiungersi a quelli comuni a tutte le edizioni critiche.

Ovviamente, i rilievi relativi alla stampa curata dal Boncompagni sono dettati dalla sensibilità e dalle esigenze che oggi abbiamo di fronte a un testo, e non inficiano minimamente il valore di quell'impresa condotta egregiamente secondo i criteri del tempo.

In realtà, non solo non è mai stata studiata nel suo complesso la tradizione manoscritta superstite, ma dai tempi del Boncompagni non è più stata svolta in merito una ricerca esauriente presso archivi e biblioteche, irrinunciabili passi preliminari per un'attendibile edizione, che reputo indifferibile e di cui vedo bene le grandi difficoltà. Ribadisco con ferma convinzione, in nome della stessa attendibilità degli studi storici, così delle scienze come di ogni altra disciplina, il dovere di compiere tale lavoro storico, filologico ed ecdotico, che non è certo un vano trastullarsi in ricerche archivistiche e giochi filologici privi di peso culturale, come, con gran fastidio da parte mia, da qualche parte devo continuare a sentir dire con non commendevole leggerezza e con superficiale coscienza dei problemi.

La nuova auspicata edizione dovrà essere preceduta da una accurata ricerca dei manoscritti e da un rigoroso studio della tradizione testuale, estesi alle fonti indirette come le traduzioni in volgare, delle quali alcune sono già note; dovrà prevedere non solo il testo ma anche, quasi come una traduzione a fronte, la trascrizione in forma simbolica attuale degli sviluppi tecnici dei problemi aritmetici e algebrici trattati retoricamente nell'originale; dovrà individuare i luoghi paralleli ed essere corredata di ampi indici e glossari, non solo matematici, stante la ricchezza di contenuti e di termini relativi soprattutto alla storia economica e commerciale. Di necessità raggrupperà diverse competenze: filologiche, storiche, scientifiche, paleografiche, commerciali e lessicali sui vari versanti, latino, arabo e bizantino.

In attesa che tale opera possa compiersi sarebbe di estrema utilità un'immediata ristampa anastatica dell'edizione del Boncompagni, che non sempre si trova nelle stesse biblioteche che pur posseggono importanti manoscritti delle opere del Fibonacci, come l'Ambrosiana di Milano o la Bibliothèque Nationale di Parigi, per far solo due esempi significativi.

Sono fermamente convinto che l'opera del Fibonacci è di tale importanza da meritare veramente il compimento tanto dell'impresa minima della ristampa che di quella più complessa e difficile dell'edizione *ex novo*.

* * *

Gli scritti di Leonardo costituiscono uno dei maggiori contributi della cultura medievale allo sviluppo della civiltà occidentale, e segnano un momento di vertice nella storia delle matematiche sia

per i risultati acquisiti sia per gli sviluppi futuri durante almeno tre secoli.

Il *Liber abaci* e la *Pratica geometriae*, pur con il loro carattere di manuali perspicui per chiarezza, completezza e funzionalità didattica, hanno avuto, in particolare il primo, un'insostituibile funzione di promozione della conoscenza scientifica; gli opuscoli, dedicati in modo più approfondito ad argomenti specifici, presentano maggiore originalità e specialmente il *Liber quadratorum* dà la misura del genio matematico del suo autore.

Non è possibile un esame analitico delle varie opere per la loro stessa complessità e ricchezza, specie sotto l'aspetto tecnico: ci limiteremo ad indicare alcuni tratti salienti per quanto hanno rappresentato rispetto alle età precedenti e alle successive.

Il *Liber abaci*, con l'introduzione delle cifre indiane e con la dimostrazione della loro utilità in un'infinità di casi teorici e pratici, e verosimilmente il perduto *Liber minoris guisae*, con procedimenti semplificati proficuamente applicabili nei traffici commerciali, avviano un nuovo tipo di aritmetica, quella dei maestri d'abaco: talché il termine non indica più lo strumento per il calcolo meccanico, ma diviene rapidamente sinonimo di nuova matematica, proprio nel senso in cui questa era svolta nel trattato di Leonardo. Dalla loro attività — ancora poco conosciuta benché di estrema importanza non solo per la storia delle matematiche ma anche per quella della cultura in generale —, fiorita e diffusasi ampiamente e rapidamente a partire dal Duecento, prima in Toscana e poi nel resto dell'Italia, si svilupperanno l'aritmetica e soprattutto l'algebra fino al Cinquecento, al di fuori del mondo universitario, che resterà fermo ai livelli elementari dell' algorismo, caricando per di più i numeri di sterili e fuorvianti significati numerologici, magici e mistici, assolutamente estranei al Fibonacci. La diffusione della matematica abachista è tale che già nel 1299 lo Statuto dell'Arte del Cambio di Firenze — con l'articolo 102 «Quod nullus de Arte scribet in suo libro per abbacum» — tenta inutilmente di bloccarla: e insieme ai procedimenti tecnici si diffonde il costume di scrivere durevolmente i conti, insegnato dal Fibonacci, tanto da creare la figura del mercante «con le dita sempre sporche d'inchiostro». La ricchezza poi dei casi concreti ricordati da Leonardo fornisce una massa inesauribile di informazioni su monete, cambi, usi commerciali, prodotti e prezzi da farne una fonte preziosa — ma poco sfruttata — per il secolo e più che precede la *Pratica della mercatura* di Francesco di Balduccio Pego-

lotti, mentre per la terminologia darebbe gran lavoro a chi avesse gli interessi lessicali del Forcellini o del Du Cange.

Ancora nel *Liber abaci* è notevole ed assolutamente nuovo lo sforzo di trattare la materia secondo un procedimento rigoroso e dimostrativo, innovando profondamente la tradizione perché tanto per l'aritmetica che per l'algebra si ricercano e si danno dimostrazioni senza ricorrere agli analoghi geometrici, come avveniva di consueto secondo il modello classico del libro X degli *Elementi*: nell'*Epistola*, risolto algebricamente un problema geometrico, il Fibonacci nota esplicitamente: «et sic reducta est questio ad unam ex algebre».

La *Pratica geometriae* affronta non solo questioni applicative da risolversi con metodi speditivi, talvolta riportati a fianco dei procedimenti rigorosi, ma anche problemi teorici come una migliore definizione di π espresso dal rapporto $864/275$ — ove è anche innovativo, rispetto al procedimento archimedeo, quello da lui adottato —, o la divisione delle figure; riprende temi già dell'arte agrimensoria, riconducendoli alle fonti teoriche e indicando l'uso di strumenti come l'archipenzolo e il quadrante per la ricerca di una migliore precisione: si pensi che ancora nel Cinquecento una gran parte dei rilevamenti era condotta con criteri largamente approssimativi, quasi delle stime più che delle misurazioni dirette. Alla base della trattazione è posto un sistematico riepilogo degli *Elementi* di Euclide, ed inoltre si fa ricorso, più o meno esplicitamente, ad altri testi: di Erone, di Archimede, di Savasorda, dei Banū Mūsā..., alla trigonometria greca delle corde e a quella araba con le altre funzioni.

Temi che erano stati trattati aritmeticamente ed algebricamente nelle due opere maggiori sono sovente riconsiderati in forme più ampie e generali negli opuscoli, tra i quali primeggia il *Liber quadratorum*, che mostra come il Fibonacci sia veramente un maestro a lungo insuperato nella teoria dei numeri con le sue ricerche sulle terne pitagoriche e sui numeri congruo-congruenti.

In generale, Leonardo nell'aritmetica manifesta una grande abilità e sicurezza nei calcoli, conosce tutte le regole di soluzione dei problemi, dirette, indirette e per approssimazione; maneggia disinvoltamente le progressioni aritmetiche e geometriche, come la nota serie di Fibonacci o «dei conigli»; in algebra discute equazioni indeterminate di primo e secondo grado in un modo che non ha precedenti e comunque cerca sempre le soluzioni per via numerica, diversamente dalla tradizione classica greca che tendeva a privile-

giare la via geometrica; nel *Flos* giunge a dare la soluzione di un'equazione di terzo grado, senza però indicare il procedimento seguito, espressa in sessagesimali e approssimata solo nelle ultime cifre delle *partes sextae*; anche in geometria si sforza di applicare l'algebra alla soluzione dei problemi geometrici, nell'intento di aritmetizzare in particolare il libro X di Euclide, per cui appare più grave la perdita del suo commento a quello stesso libro, che — come si è detto — era stato composto con l'intento dichiarato di ridurre «*intellectum ipsius — cioè del libro X — ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur*»; considera anche le quantità negative e impiega correttamente lo zero come numero nella sottrazione e nella divisione, e come ausiliare per facilitare il calcolo delle radici.

Leonardo ha ben chiaro il fine delle sue opere, e della connessione che in esse debbono avere l'aritmetica-algebra e la geometria, come lucidamente si esprime nella premessa all'edizione riveduta del *Liber abaci*: «*In quo plenam numerorum doctrinam edidi, iuxta modum Indorum, quem modum in ipsa scientia prestantiorem elegi. Et que arismetrica et geometrica scientia sunt connexe et suffragatorie sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina nisi intersecantur geometrica quedam vel ad geometriam spectantia, que hic tantum iuxta modum numeri operantur; qui modus est sumptus ex multis probationibus et demonstrationibus que figuris geometricis fiunt. Verum in alio libro, quem de practica geometriae composui, ea que ad geometriam pertinent et alia plura copiosis explicavi, singula subiectis approbationibus geometricis demonstrando*».

Prosegue quindi con una pagina che più di mille discorsi manifesta la sua attenzione per la didattica e l'apprendimento della disciplina, cui penso sia anche dovuta l'ampia, rapida ed efficace diffusione dei suoi scritti: «*Sane hic liber magis ad theoricam spectat quam ad praticam. Unde qui per eum huius scientie praticam bene scire voluerint, oportet eos continue usu et exercitio diuturno in eius praticis perstudere: quod scientia per praticam versa in habitum, memoria et intellectus adeo concordent cum manibus et figuris, quod quasi uno impulsu et anelitu in uno et eodem instanti circa idem per omnia naturaliter consonent: et tunc cum fuerit discipulus habitudinem consecutus, gradatim poterit ad perfectionem huius facile pervenire*».

Si preoccupa che il procedimento non sia ridondante, ed insegna come ridurlo all'essenziale evitando inutili fatiche — «*ut non dimittatur magisterium evitandi laborem in quibus possumus, qua-*

liter in hoc evitandum sit, ostendamus...», «et evitabis quod evitare poteris...» —; sa cogliere, specie nel *Liber abaci* e nella *Pratica geometriae*, che non si rivolgono solo ai matematici ma anche a un ampio pubblico, l'opportunità che dei metodi rigorosi si diano pure versioni semplificate e speditive, mantenendoli comunque distinti: «hi qui secundum demonstrationes geometricas et hi qui secundum vulgarem consuetudinem, quasi laicali more, in dimensionibus — cioè nel campo della geometria applicata — voluerint operari...», «Verum si hoc idem secundum artem reperire desideras... ut superius per vulgarem modum invenimus...».

I contenuti degli scritti del Fibonacci furono rapidamente assorbiti e messi a frutto nell'ambiente dei maestri d'abaco che prosperarono fino al Cinquecento conservando la memoria di lui; con la loro decadenza, quando l'algebra si separa dalla matematica pratica e diviene oggetto di ricerche teoriche autonome, anche questa si perse, tanto che il Cossali, in pieno Settecento, volendo esporre i contributi di Leonardo alla storia dell'algebra fu costretto a tentarne una disperante ricostruzione sfruttando i riferimenti conservati nella *Summa* del Pacioli. Furono verso la metà del secolo scorso, Guglielmo Libri e poi con maggior impegno e più fortuna il principe Baldassarre Boncompagni a recuperare l'opera del Fibonacci alla nostra conoscenza e alla storia.

Vorrei chiudere con un lapidario riepilogo della vita e dell'opera del Fibonacci scritto nel 1506 da ser Perizolo da Pisa: «Lionardo Fibonacci fue nostro concive, e vivette nelli anni 1203. Vidde tutto el mondo; tornoe a Pisa, e recò i numeri arabichi e l'aritmetica...».

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

- «Ricordi di Ser Perizolo da Pisa dall'anno 1422 sino al 1510, a cura di F. BONAINI, in *Archivio storico italiano* 6 (1845), parte II, pp. 385-396.
- F. BONAINI, «Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci nuovamente scoperta», in *Giornale storico degli Archivi toscani* 1 (1857), pp. 239-246; ristampata a parte: Pisa 1858, e ancora in: *Iscrizione collocata nell'Archivio di Stato in Pisa a onore di Leonardo Fibonacci*, cui va unita una spiegazione del prof. FRANCESCO BONAINI, Pisa 1867.
- B. BONCOMPAGNI, «Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo», in *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei* 5 (1851-1852), pp. 5-91, 208-246 (il lavoro, preliminare all'edizione degli scritti del Fibonacci, è rimasto incompiuto).
- B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Roma 1854.
- E. BORTOLOTTI, «Le fonti arabe di Leonardo Pisano», in *Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna*, Classe di scienze fisiche, sezione di scienze fisiche e matematiche s. VIII, 7 (1929-1930), pp. 39-49.
- M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig 1913, pp. 3-53.
- M. CLAGETT, *Archimedes in the Middle Ages*, I, *The Arabo-Latin tradition*, Madison (Wisconsin) 1964.
- P. COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*, I, Parma 1797.
- G. DERENZINI, «All'origine della tradizione di opere scientifiche classiche: vicende di testi e di codici tra Bisanzio e Palermo», in *Physis* 18 (1976), pp. 87-103.
- Encyclopédie de l'Islam*, Leyde-Paris 1960 (in continuazione).
- G.B. GUGLIELMINI, *Elogio di Leonardo Pisano recitato nella grand'aula della regia Università di Bologna nel giorno XII Novembre MDCCCXII*, Bologna 1813.
- C.H. HASKINS, *Studies in the history of mediaeval science*, New York 1960 (1^a ed. 1924).
- C.H. HASKINS, *La rinascita del dodicesimo secolo*, Bologna 1972 (1^a ed. 1927).
- J.L.A. HUILLARD-BREHOLLES, *Historia diplomatica Frederici II*, Paris 1852-1861.
- R. LEMAY, «The Hispanic origin of our present numeral forms», in *Viator* 8 (1977), pp. 435-462.
- Tre scritti inediti di LEONARDO PISANO secondo la lezione di un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano*, a cura di B. BONCOMPAGNI, Firenze 1854; ristampati — dopo le osservazioni e i commenti di A. GENOCCHI (in *Annali di scienze matematiche e fisiche* 6 (1855), pp. 129-134, 161-209, 218-259, 273-320, 345-362) — in edizione migliorata e con l'aggiunta di un'introduzione, con il titolo: *Opuscoli di LEONARDO PISANO pubblicati da B. BONCOMPAGNI secondo la lezione di un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano*, Firenze 1856.
- Scritti di LEONARDO PISANO matematico del secolo decimoterzo*, pubblicati da B. BONCOMPAGNI. I. *Il Liber Abbaci secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I, 2616, Badia Fiorentina*, n. 73, Roma 1857; II. *La Practica Geometriae secondo la lezione del Codice Urbinate n. 292 della Biblioteca Vaticana. Opuscoli secondo la lezione di un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E. 75. Parte Superiore*, Roma 1862.
- LÉONARD DE PISE, *Le livre des nombres carrés*, traduit du ...latin en français avec une introduction et des notes par P. VER EUCKE, Bruges 1952.
- M. LEVEY - M. PETRUCK, *Principles of Hindu reckoning*, Madison 1965.
- G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la Renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, II, Paris 1838, pp. 20-44, 287-479.
- G. LORIA, «Leonardo Fibonacci», in A. MIELI ed., *Gli scienziati italiani dall'inizio del Medioevo ai nostri giorni*, Roma 1921-1923, pp. 4-12.

- G. LORIA, *Storia delle matematiche*, Milano 1950 (1ª ed. 1929), pp. 219-235.
- G. MILANESI, *Documento inedito e sconosciuto intorno a Leonardo Fibonacci*, Roma 1867 (già pubblicato nel *Giornale arcadico* t. 197).
- E. PICUTTI, «Il Libro dei quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel Codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze. Introduzione e commenti», in *Physis* 21 (1979), pp. 195-339.
- E. PICUTTI, «Sui numeri congruo-congruenti di Leonardo Pisano», in *Physis* 23 (1981), pp. 141-170.
- E. PICUTTI, «Leonardo Pisano», in *Le scienze* 15 (1982), n. 164, pp. 96-105.
- R. RASHED, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris 1984.
- R. RONCONI, «Istorie pisane», a cura di F. BONAINI, in *Archivio storico italiano* 6 (1845), parte I.
- J. RUSKA, «Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst», in *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse* 1917, pp. 1-125.
- D.E. SMITH, *History of mathematics*, New York 1958 (1ª ed. 1925).
- P. SEZGIN, *Geschichte des arabischen Schrifttums, V. Mathematik bis ca. 430 H.*, Leiden 1974.
- H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, New York 1972 (1ª ed. 1900).
- W. VAN EGMOND, *Practical mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian abacus manuscripts and printed books to 1600*, Firenze 1980 (Supplemento agli *Annali dell'Istituto e Museo di storia della scienza*, Monografia n. 4).
- K. VOGEL, «Fibonacci, Leonardo», in C.C. GILLESPIE ed., *Dictionary of scientific biography*, New York 1970-1978, IV, pp. 604-613 (il repertorio può essere proficuamente consultato anche per gli altri autori citati nel testo).
- G. WOLF ed., *Stupor mundi. Zur Geschichte Friedrichs II. von Hohenstaufen*, Darmstadt 1966 (Wege der Forschung 101).
- A.P. YOUSCHKEVITCH, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig 1964, pp. 371-387.

ORDO . POPULVSQ . PISANVS

OVO . VETERI . CONTEMPTVS . CALVMNIA . OBTRITA

MAIORVM . VOLVNTAS . STVDIVMQVE

IN . LEONARDVM . FIBONACCIVM

NOTORA . TESTATORAQ . ESSENT

AMPLISSIMI . PISANAE . REIPVB . DE . EODEM . DECRETI . EXEMPLAR

QVOD . VNVM . SUPEREST . TANTO . VIRO . AEOVALE . MONVMENTVM

IN . PATRIO . TABVLARIO . AFFIGI . IVSSIT . A . MDCCCLXV .

CONSIDERANTES . NOSTRE . CIVITATIS . ET . CIVIVM . QVEM . SVBSTITNET . IN . AVDIENDIS . ET . CONSOLIDANDIS
HONOREM . ATOVE . PROPECTVM . QVI . EIS . TAM . PER . ESTIMATIONIBVS . ET . RATIONIBVS . SVPRADICTIS . A
DOCTRINAM . QVAM . PER . SEDVLA . OBSEQVIA . DISCRETI . COMVNI . ET . CAMERARIIS . PVBLICIS . DE . COMVNI
ET . SAPIENTIS . VIRI . MAGISTRI . LEONARDI . BIGOLLI . ET . PRO . COMVNI . MERCEDE . SIVE . SALARIO . SVO
IN . ABBACANDIS . ESTIMATIONIBVS . ET . RATIONIBVS . ANNIS . SINGVLIS . LIBRE . XX . DENARIORVM . ET
CIVITATIS . EIVSQVE . OFFICIALIVM . ET . ALIIS . QVOTIES . AMISERIA . CONSVETA . DARI . DEBEANT . IPSEQVE
EXPEDIT . CONFERVNTVR . VT . EIDEM . LEONARDO . PISANO . COMVNI . ET . EIVS . OFFICIALIBVS . IN
MERITO . DILECTIONIS . ET . GRATIE . ATOVE . SCIENTIE . SVE . ABBACATIONE . DE . CETERO . MORE . SOLITO
PREOCAGIVA . IN . RECOMPENSATIONE . LABORIS . SVI . SERVARI . PRESENTI . CONSTITVTIONE . FIRMAMVS